L'intégrale

Prof. Smail BOUGUERCH

Intégral d'une fonction continue sur un segment:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$
L'intégral de la fonction f entre a et b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

propriétés:

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

La linéarité:

$(k \in \mathbb{R})$; $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$	$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Relation de Chasles:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Intégral et comparaison:

Si : $\forall x \in [a;b]$ on a $f(x) \geq 0$ Alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$	Si : $\forall x \in [a;b]$ on a $f(x) \geq g(x)$ Alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

La valeur moyenne:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

La valeur moyenne de la fonction f sur le intervalle $[a;b]$ est le réel défini par : $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Intégration par partie:

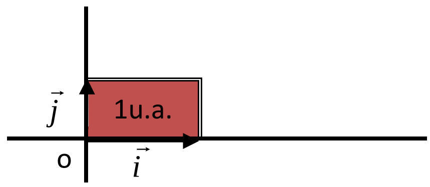
Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ à condition que f' et g' soient continues sur l'intervalle $[a;b]$

$$\int_a^b [f'(x) \times g(x)]dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x) \times g'(x)]dx$$

Calcul de l'aire algébrique d'un domaine plan:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
L'unité de surface (u.a.): est la surface d'un rectangle défini par le point O (origine du repère) et les deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$1u.a. = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

L'aire algébrique délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est représentée par :

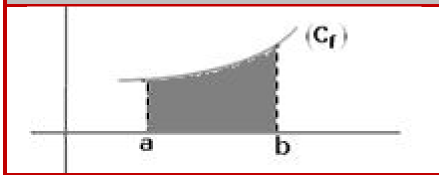
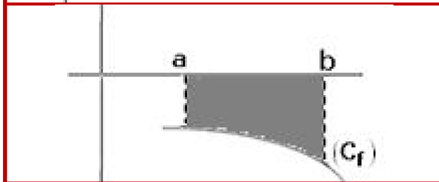
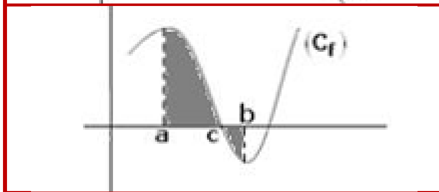
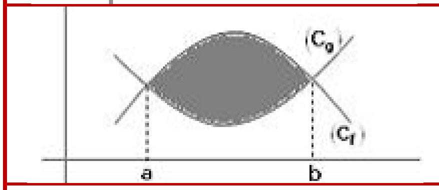
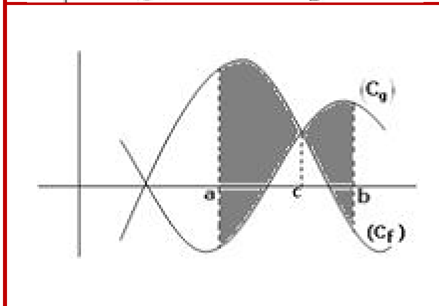
$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.a.$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$

L'are algébrique comprise entre la courbe (C_f), la courbe (C_g), et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est représentée par :

$\left(\int_a^b |f(x)-\mathrm{g}(\mathrm{x})|dx\right)u.a.$

Cas particulier:

La représentation	Remarques	Aire algébrique du domaine plan gris dans la représentation
	f positive sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.a.$
	f négative sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b (-f(x))dx\right)u.a.$
	• f positive sur $[a;c]$ • f négative sur $[\mathrm{c};\mathrm{b}]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b (-f(x))dx\right)u.a.$
	(C_f) se situe au-dessus de (C_g) sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)-\mathrm{g}(\mathrm{x})dx\right)u.a.$
	• (C_f) se situe au-dessus de (C_g) sur $[a;c]$ • (C_f) se situe au-dessous de (C_g) sur $[\mathrm{c};\mathrm{b}]$	$\left(\int_a^c (f(x)-\mathrm{g}(\mathrm{x}))dx+\int_c^b (\mathrm{g}(x)-f(\mathrm{x}))dx\right)u.a.$

Calcul d'un volume:

Le volume du solide engendré par un tour complet, de la courbe (C_f), autour de l'axe des abscisses dans un intervalle $[a;b]$ est :

$$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right]u.a.$$